

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ιούλιος 2019

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). Καλή Επιτυχία.

Θέμα 1 : α) Αν $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιοι πίνακες, να αποδείξετε ότι και το γινόμενο PQ είναι ορθογώνιος.

β) Αν $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιος και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι οποιοσδήποτε πίνακας, να αποδείξετε ότι:

$$\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2.$$

Θέμα 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel και η βέλτιστη SOR.

Θέμα 3 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Αφού αποδείξετε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος, να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$. (Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } b = (-2 \ 3 \ -2 \ -1)^T, \text{ με την } QR \text{ ανάλυση χρησιμοποιώντας τον}$$

αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$.

Θέμα 5 : Δίνεται ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Χρη-

σιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1 \ 0 \ 0)^T$, να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος. Η λύση των συστημάτων να γίνει με παραγοντοποίηση Cholesky. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)